Université Paul Sabatier
L1 STS PCP

Toulouse, le 17 mai 2011

EXAMEN
DE MECANIQUE DU POINT
(Durée : 1h30)

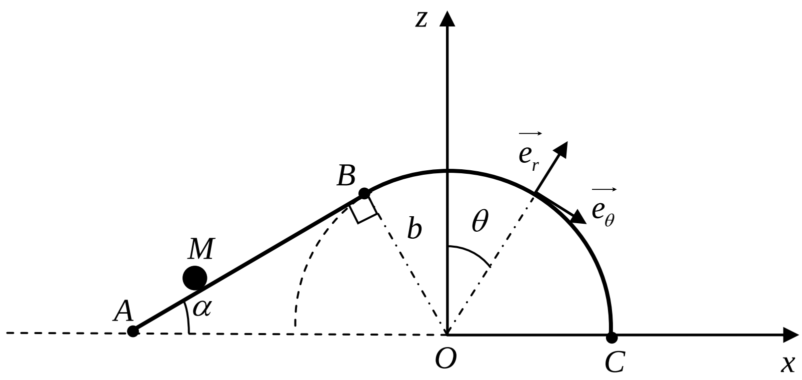
Toutes les parties sont indépendantes. Toutes les justifications nécessaires seront notées.
Les documents personnels, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Les résultats seront systématiquement exprimés en fonction des données des énoncés.

I – Mouvement d'une bille sur une piste circulaire

Une bille *M*, assimilée à une masse ponctuelle *m*, peut glisser **sans frottement** sur une piste constituée de deux portions continues AB et BC dans le plan vertical xOz du référentiel galiléen $\mathcal{R} = (O, xyz)$.

La première partie AB est une piste rectiligne, inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal xOy. AB se raccorde alors tangentiellement à la portion BC, circulaire, de rayon *b*.

Les points *A* et *C* appartiennent au plan horizontal, et on note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur terrestre, supposé uniforme.



A- **Etude de la portion** AB : *M* est lancé avec une vitesse initiale v_A en *A*.

1) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur *M*, et les exprimer dans $\mathcal{B} = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.
2) a) Donner la définition d'une force conservative.
   b) Parmi les forces énoncées en A-1, quelles sont celles qui sont conservatives ?
   c) Quand peut-on dire qu'une force dérive d'une énergie potentielle ?
   d) Parmi les forces énoncées en A-1, quelles sont celles qui dérivent d'une énergie potentielle ?
   e) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de *M*, en fonction de ℓ, la distance parcourue par *M*. On prendra l'origine de l'énergie potentielle dans le plan *xOy*.
3) Déduire du théorème de l'énergie mécanique, l'expression de la norme v_B de la vitesse de *M* lorsqu'il arrive en *B*.
4) Déterminer l'expression de la vitesse limite $v_{A\mathrm{lim}}$ à fournir à *M* en *A*, pour que la bille puisse atteindre le point *B*.
5) Déduire de la relation fondamentale de la dynamique, l'expression de l'amplitude *a* de l'accélération de *M*.
6) Sachant que $v_A > v_{A\mathrm{lim}}$, déterminer l'expression de la durée t_{AB} du parcours de AB.

B- **Etude de la portion** BC : on suppose que B est atteint, et donc $v_A > v_{A\lim}$.

On introduit la base mobile $\mathcal{B}_{cyl} = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_y}\right)$, telle que $\overrightarrow{OM} = b\overrightarrow{e_r}$ et $\theta = \left(\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_r}\right)$ (Voir Figure).

1) Déduire de la relation fondamentale de la dynamique, l'expression R_N de la composante normale de la réaction du support sur M, en fonction de θ et $\dot{\theta}$.
2) Déduire du théorème de l'énergie mécanique, l'expression de v_H, vitesse de M au point H défini par $\theta = 0$. On l'exprimera en fonction de v_B et des autres paramètres du système.
3) Rappeler la condition devant exister sur R_N pour que la bille reste en contact de BC.
4) Déduire des questions B-1-2-3 et de l'expression de la vitesse dans $\mathcal{B}_{cyl}$, la condition sur la vitesse v_A pour que la bille ne décolle pas avant d'arriver en H.
5) La bille ayant dépassé le point H, déterminer l'angle $\theta_{\lim}$ pour lequel la bille décolle du support. On l'exprimera d'abord en fonction de v_H, puis en fonction de v_A.

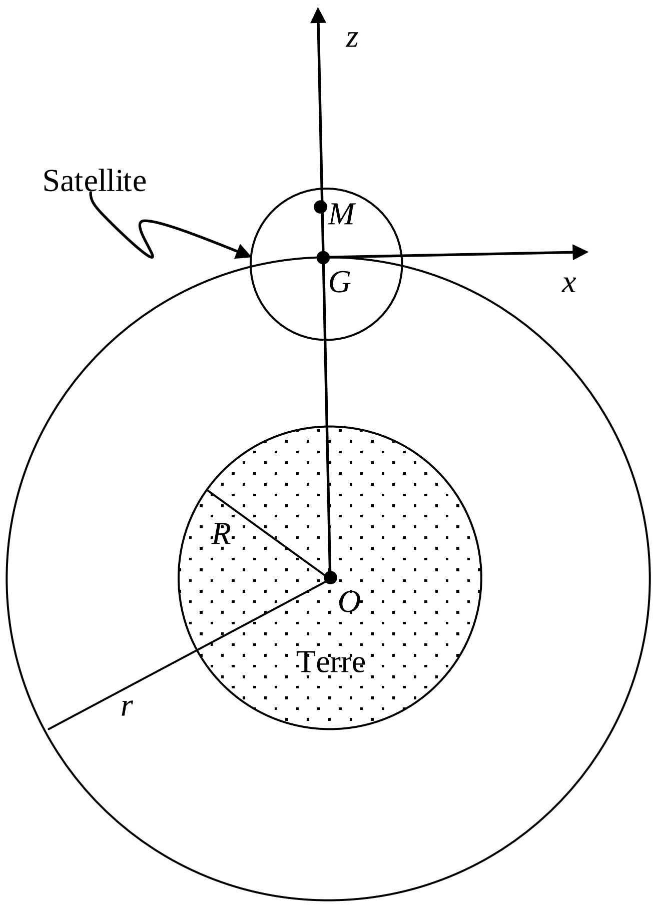
II – Objet en mouvement à l'intérieur d'un satellite (inspiré de ENSI Méca I – 2009)

La Terre est assimilable à une sphère de centre O et de rayon R. La masse M_T de la Terre est supposée distribuée en couches sphériques homogènes.
Un satellite artificiel S, de masse M_{sat} et de centre de masse G, décrit dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, considéré comme galiléen, une orbite circulaire de centre O et de rayon r, à la vitesse angulaire ω.
On note g_o l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre, et $g(r)$ celle au niveau de l'orbite. G désigne la constante universelle de gravitation.

A- **Etude du mouvement du satellite.**

1) Rappeler la définition de la force de gravitation entre le satellite et la Terre.
2) Quelle est la différence entre force de gravitation et pesanteur $\vec{P}$? En déduire, dans le cas présent, l'expression de $\vec{P}$ pour le satellite.
3) Quelle est alors l'expression de $g(r)$ en fonction de G, M_T et r ? Et en fonction de g_o, R et r ?
4) Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}\left(S/\mathcal{R}_g\right)$ du satellite dans $\mathcal{R}_g$. On définira la base de projection utilisée.
5) Déduire de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à S dans $\mathcal{R}_g$, l'expression de ω en fonction de g_o, R et r.

A l'intérieur du satellite S se trouve un tube de longueur $GA = a$ et d'axe (Gz), $\overrightarrow{e_z}$ définissant la verticale ascendante : $\overrightarrow{GA} = +a\overrightarrow{e_z}$. Dans ce tube, un point M, de masse m (faible devant la masse de S), peut coulisser sans frottement. On note z $(z > 0)$ la distance entre M et G, avec $z << r$. On note $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire du satellite, tel que représenté sur la figure, et $\overrightarrow{e_y}$, tel que $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est une base orthonormée directe. Soit $\mathcal{R} = (O, xyz)$, le référentiel associé au satellite et à $\mathcal{B}$.



B- <u>Etude du mouvement de *M* dans le tube.</u>

1) Donner la définition des termes suivants : référentiel de Copernic, référentiel géocentrique, référentiel galiléen.
2) Que peut-on dire de $\mathcal{R}$?
3) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur M dans $\mathcal{R}$: on donnera leur expression générale, puis on les exprimera dans $\mathcal{B}$.
4) Déduire de la relation fondamentale de la dynamique l'équation différentielle du second ordre du mouvement de M.
5) Sachant que le point M est abandonné sans vitesse initiale par rapport à S à la distance $z_o = \dfrac{a}{2} > 0$ de G, déterminer l'expression de $z(t)$.
6) Déterminer l'expression du temps T nécessaire pour que M arrive en A.
7) Quelle est l'expression de la réaction exercée par le tube sur M ?
8) En déduire l'expression de la force exercée par M sur le tube.